

*Список вопросов и задач к итоговой контрольной для первокурсников по дисциплине
математический анализ*

Теоретические вопросы

1. Множества и операции над множествами.
2. Декартово произведение множеств. Примеры.
3. Предел числовой последовательности. Определение и примеры.
4. Сходящаяся последовательность. Примеры.
5. Что такое функция? Дайте определения области определения и области значений функции.
6. Что такое предел функции в точке? Дайте определения на языке « $\epsilon - \delta$ » (Коши) и на языке последовательностей (Гейне).
7. Что такое непрерывность функции в точке? Сформулируйте определение.
8. Что такое производная функции в точке? Дайте определения.
9. Что такое дифференциал функции? Как он связан с производной?
10. Какой геометрический смысл имеет производная функции в точке?
11. Сформулируйте и докажите критерий Коши для сходимости последовательности.
12. Сформулируйте принцип Кантора о вложенных отрезках. Приведите пример его применения.
13. Что такое верхний и нижний пределы последовательности? Приведите пример.
14. Сформулируйте и докажите теорему Вейерштрасса о пределе монотонной последовательности.
15. Что такое равномерная непрерывность функции? Чем она отличается от обычной непрерывности?
16. Сформулируйте и докажите теорему о пределе сложной функции.
17. Выведите правило дифференцирования обратной функции. Приведите пример.
18. Сформулируйте и докажите теорему Коши о промежуточном значении непрерывной функции.
19. Что такое точка разрыва функции? Дайте классификацию точек разрыва с примерами.
20. Сформулируйте и докажите теорему Кантора о равномерной непрерывности функции на отрезке.

Практические задачи

1. Докажите, что не существует рационального числа r , такого, что $r^2 + 3r + 1 = 0$.
2. $f(x) = (x - 1)^4 + 4(x - 1)^2 + \cos(x - 1)$. Доказать, что $f(1 - a) = f(1 + a), \forall a \in \mathbb{R}$.

3. Определить область существования функции $y = \frac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}$.

4. Доказать, что функция

$$f(x) = c + \frac{m \lg \lg x}{\lg k}$$

при любом постоянном c удовлетворяет соотношению $f(x^k) - f(x) = m$. Найти значение постоянного c , если $f(100) = 0$.

5. Определить область существования функции $y = \lg \frac{x+6}{x^2-4x+3}$.

6. Решить неравенство $\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \operatorname{tg}\frac{x}{3} > 0$.

7. Найти предел

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + 2\operatorname{ctgx} x}{(\pi - x) \sin \frac{x}{2}}.$$

8. Исследовать функцию на непрерывность, непрерывность справа и слева, установить характер точек разрыва и построить график:

$$y = \frac{|x - 1|}{x - 1} \text{ при } x \neq 1.$$

Можно ли доопределить функцию при $x = 1$ так, чтобы она стала непрерывной в этой точке?

9. Будет ли функция $f(x) = x^5 - 3x + 1$ в какой-либо точке отрезка $[1; 2]$ иметь значение, равное 0?

10. Пусть α и β – иррациональные числа, а $\alpha + \beta$ рационально. Доказать, что числа $\alpha - \beta$ и $\alpha - 2\beta$ иррациональны.

11. Решить уравнение: $|\sin x| = \sin x + 2$.

12. Найти производную функции $y = (\sin x)^{\cos x}$ в точке $x = x_0$.

13. Данна функция $y = x + \frac{1}{x}$ ($x > 0$). Найти ее наименьшее значение и значение аргумента, при котором оно достигается. Существует ли наибольшее значение функции?

14. Функция $f(x)$ в определена на отрезке $[-1, 0]$. Какова область существования функции $f(-x^2)$?

15. Докажите, что произведение двух четных функций – четная функция.

16. Данна функция $y = x + \frac{1}{x}$ ($x > 0$). Найти ее наименьшее значение и значение аргумента, при котором оно достигается. Существует ли наибольшее значение функции?

17. Пользуясь определением, доказать, что последовательность

$$x_n = \frac{1}{n^3 + n + 5}$$

есть бесконечно малая, т.е. что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

18. Исходя из определения $\left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \right)$, доказать непрерывность функции $y = \cos(ax + b)$ для всех $x \in \mathbb{R}$.

19. Пользуясь определением непрерывности функции через приращения аргумента и функции ($\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$), доказать непрерывность функции $y = \sqrt[3]{x}$ для всех $x \in \mathbb{R}$.

20. Найти и исследовать точки разрыва функции $y = \cos \frac{\pi}{2-x}$.

21. Найти мгновенную скорость прямолинейно движущейся точки, если ее координата в момент времени t выражается формулой $x = t^4 + 4t^2 - 2t - 1$.

22. Пользуясь определением производной, вычислить производную функции $y = \frac{1}{x^2+2}$.

23. Вычислить предел: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{e^x - e^a}{x - a}$.

24. Найти максимумы и минимумы функции $y = \sqrt[5]{x^4}$.

25. Пользуясь определением производной, вычислить производную функции $y = \sqrt[3]{x}$.

26. Вычислить предел: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + \sin x}{x + \sin x}$.

27. Найти максимумы и минимумы функции $y = \sqrt[3]{2x^3 + 3x^2 - 36x}$.
28. Пользуясь определением производной, вычислить производную функции $y = \sqrt[n]{x}$.
29. Вычислить предел: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos x}{\cos x - 1}$.
30. Найти максимумы и минимумы функции $y = x^2 e^{-x}$.
31. Пользуясь определением производной, вычислить производную функции $y = \sqrt{x^2 - 3}$.
32. Вычислить предел: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} [\tan x - \frac{1}{1 - \sin x}]$.
33. Найти максимумы и минимумы функции $y = \frac{14}{x^4 - 8x^2 + 2}$.
34. Пользуясь определением производной, вычислить производную функции $y = e^{kx}$.
35. Вычислить предел: $\lim_{x \rightarrow 1} [\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x}]$.
36. Найти максимумы и минимумы функции $y = x^2(x - 4)$.
37. Пользуясь определением производной, вычислить производную функции $y = \sin^2 x$.
38. Вычислить предел: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)}$.
39. Найти максимумы и минимумы функции $y = -x^2 \sqrt[5]{(x-2)^2}$.
40. Пользуясь общими правилами дифференцирования, найти производную функции $y = \frac{1}{(1-x^2)(1+x^4)}$.
41. Вычислить предел: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x^2-3)}{x^2+3x-10}$.
42. Найти максимумы и минимумы функции $y = x^2 - 6x + 8$.