Алгебра
1-курс

1. Векторные пространства.
2. Подпространства векторного пространства.
3. Базис и размерность векторного пространства.
4. Векторные пространства со скалярным умножением.
5. Евклидовы векторные пространства.
6. Квадратичные формы.
7. Приведение квадратичной формы к каноническому виду.
8. Линейные отображения векторных пространств.
9. Размерность ядра и образа.
10. Алгебра линейных операторов.
11. Матрицы линейного оператора в различных базисах.
12. Определитель и след линейного оператора.
13. Инвариантные подпространства.
14. Собственные векторы. Характеристический многочлен.
15. Жорданова нормальная форма.

16-18. Пусть векторы $e_1,\dots,e_n$ и x заданы своими координатами в некотором базисе:

16. $e_1=(1,1,1),\ e_2=(1,1,2),\ e_3=(1,2,3),\ x=(6,9,14)$;
17. $e_1=(2,1,-3),\ e_2=(3,2,-5),\ e_3=(1,-1,1),\ x=(6,2,-7)$;
18. $e_1=(1,2,-1,-2),\ e_2=(2,3,0,-1),\ e_3=(1,2,1,4),\ e_4=(1,3,-1,0)$,
$x=(7,14,-1,2)$.

Доказать, что $(e_1,\dots,e_n)$ - также базис пространства, и найти координаты вектора x в этом базисе.

19-22. Доказать, что системы векторов линейно независимы, и дополнить их до базиса пространства строк:

19. $a_1=(2,2,7,-1),\ a_2=(3,-1,2,4),\ a_3=(1,1,3,1)$;
20. $a_1=(2,3,-4,-1),\ a_2=(1,-2,1,3)$;
21. $a_1=(4,3,-1,1,1),\ a_2=(2,1,-3,2,-5),\ a_3=(1,-3,0,1,-2),\ a_4=(1,5,2,-2,6)$;
22. $a_1=(2,3,5,-4,1),\ a_2=(1,-1,2,3,5)$.

23-24. Найти нормальный вид квадратичных функций:

23. $x_1^2+x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$;
24. $x_1^2+2x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+4x_1x_3+2x_2x_3$.

25-30. Найти собственные значения и собственные векторы линейных операторов, заданных в некотором базисе матрицами:

25. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$;

26. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

27. $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$;

28. $\begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$;

29. $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$;

30. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.