

1. Что такое мощность множества? Сравните мощности конечных и бесконечных множеств.
2. Дайте определение открытого, замкнутого и совершенного множества точек на прямой.
3. Что такое мера Лебега линейного множества? Перечислите её основные свойства.
4. Что такое измеримая по Лебегу функция? Определите интеграл Лебега и способ его вычисления.
5. Дайте определение линий и областей на комплексной плоскости. В чём заключается геометрический смысл функции комплексного переменного?
6. Определение производной функции комплексного переменного. Что называется аналитической функцией?
7. Перечислите основные элементарные функции комплексного переменного и их свойства.
8. Как определяется интеграл от функции комплексного переменного? Сформулируйте интегральную формулу Коши.
9. Степенные ряды с комплексными коэффициентами. Теорема о разложении аналитической функции в степенной ряд Тейлора.
10. Ряд Лорана. Область сходимости. Разложение аналитической функции в ряд Лорана.
11. Нули аналитических функций. Изолированные особые точки: классификация (устраняемая, полюс, существенно особая).
12. Определение вычета функции в изолированной особой точке. Основная теорема о вычетах и её применение для вычисления контурных интегралов.
13. Найдите меру Лебега множества  $E = \{x \in [0, 5] : x^2 - 5x + 4 \leq 0\}$ .
14. Найдите меру Лебега множества  $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} (0, 1 + \frac{1}{n})$ .
15. Найдите меру Лебега множества  $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} [n, n + \frac{1}{3^n}]$ .
16. Найдите меру Лебега множества  $E = \{x \in [0, 2] : x \notin \mathbb{Q}\}$ .
17. Найдите меру Лебега множества  $E = \{x \in [-2, 5] : 2x^2 - x - 6 \leq 0\}$ .
18. Вычислите интеграл Лебега функции:  $f(x) = \begin{cases} 3, & 0 \leq x \leq 2 \\ 5, & 3 < x \leq 5 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$
19. Вычислите интеграл Лебега функции  $f(x) = n$  при  $n - 1 \leq x < n$ ,  $n = 1, 2, 3, 4$ , на отрезке  $[0, 4]$ .
20. Вычислите интеграл Лебега функции  $f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2, & 1 < x \leq 3 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$
21. Вычислите интеграл Лебега функции  $f(x) = e^{-x}$  на промежутке  $[0, +\infty)$ .
22. Вычислите интеграл Лебега функции  $f(x) = \begin{cases} 5, & 1 \leq x < 3 \\ -2, & 2 \leq x \leq 4 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

23. Пусть  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\}$ ,  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$ . Найдите  $A \cap B$  и  $A \setminus B$ . Изобразите их на плоскости.
24. Пусть  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 2\}$ ,  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2\}$ . Найдите  $A \cap B$  и  $A \setminus B$ . Изобразите на плоскости.
25. Пусть  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2\}$ ,  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 3\}$ . Найдите  $A \cap B$  и симметрическую разность  $A \Delta B$ . Изобразите на плоскости.
26. Докажите ассоциативность пересечения множеств:  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ .
27. Для  $z = 3 + 4i$  найдите  $\operatorname{Re} z$ ,  $\operatorname{Im} z$ ,  $|z|$ ,  $\arg z$ .
28. Запишите  $z = -1 + i\sqrt{3}$  в показательной форме. Найдите  $|z|$  и  $\arg z$ .
29. Вычислите  $(1 + i)^8$ . Ответ запишите в алгебраической форме.
30. Найдите все кубические корни числа  $z = -8$ . Запишите их в алгебраической форме.
31. Решите уравнение  $z^2 + 2z + 5 = 0$  в поле  $\mathbb{C}$ .
32. Для  $z = \sqrt{3} - i$  найдите  $|z|$ ,  $\arg z$  и вычислите  $z^4$ .
33. Опишите и изобразите на плоскости множество  $\{z \in \mathbb{C} : |z - 1| < 2\}$ .
34. Опишите и изобразите на плоскости множество  $\{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| \leq 3\}$ .
35. Опишите и изобразите на плоскости множество  $\{z \in \mathbb{C} : |z + i| = |z - i|\}$ .
36. Исследуйте на аналитичность функцию  $f(z) = \operatorname{Re}(z\bar{z})$ .
37. Для функции  $f(z) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$  проверьте выполнение условий Коши-Римана и найдите производную  $f'(z)$ .
38. При каком значении параметра  $\lambda$  функция  $f(z) = y + i\lambda x$  является дифференцируемой?
39. Дана вещественная часть дифференцируемой функции:  $u = e^{2x} \cos y$ . Найдите саму функцию  $f(z)$ , если известно, что  $f(0) = 1$ .
40. Найдите постоянные  $a, b, c$ , при которых функция  $f(z) = x + ay + i(bx + cy)$  является голоморфной.
41. Проверьте дифференцируемость функции  $f(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y$  и найдите её производную.
42. Найдите вычеты функции  $f(z) = \frac{1}{z^3 + z}$  во всех её конечных особых точках.
43. Вычислите  $\operatorname{Res}_{z=-2} \frac{z^3}{(z+2)^2(z^2+3)}$ .
44. Вычислите  $\operatorname{Res}_{z=0} \frac{\cos z}{z^3 + 4z}$ .
45. Найдите вычеты функции  $f(z) = \frac{z+z^2}{(1-z^2)(1+z)}$  во всех конечных особых точках.
46. Вычислите интеграл  $\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z} dz$ .
47. Вычислите интеграл  $\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z(z^2 + 1)} dz$ .

48. Вычислите интеграл  $\oint_{|z-i|=2} \frac{e^z}{z^2 + 3z + 2i} dz$ .

49. Вычислите интеграл  $\oint_{|z|=2} \frac{dz}{z^2 + 1}$ .

50. Вычислите интеграл  $\oint_{|z+i|=2} \frac{dz}{z^2 + 9}$ .

51. Разложите функцию  $f(z) = \frac{1}{z(2-z)}$  в ряд Лорана в окрестности точки  $z_0 = 0$ .

52. Найдите образ области  $D = \{z : \operatorname{Re} z < 1\}$  при линейном отображении  $w = (1 + i)z + 1$ .

53. Найдите образ области  $D = \{z : |z| < 1\}$  при дробно-линейном отображении  $w = \frac{z-i}{z+i}$ .

54. Найдите дробно-линейное отображение  $w(z)$ , удовлетворяющее условиям:  $w(0) = 4$ ,  $w\left(\frac{1+2i}{2}\right) = i$ ,  $w(2i) = 0$ .

55. Найдите образ кольца  $1 < |z| < 2$  при отображении Жуковского  $w = z + \frac{1}{z}$ .

56. Найдите образ верхней полуплоскости  $\operatorname{Im} z > 0$  при отображении  $w = \frac{z-i}{z+i}$ .

57. Найдите дробно-линейное отображение  $w(z)$ , удовлетворяющее условиям:  $w(1) = i$ ,  $w(\infty) = 1$ ,  $w(i) = 1 + i$ .