

Функционалдық анализ

4 – курс

1. Метрикалық кеңістік ұғымы
2. Толық метрикалық кеңістіктер
3. Сығылған бейнелеулер принципі және оның қолданылуы
4. Дифференциалдық теңдеулер үшін бар болу және жалғыздық теоремалары
5. Метрикалық кеңістіктердегі жинақылық
- 6-10. Төменде келтірілген функциялардың қайсысы $\mathbb{R}$ жиынындағы қашықтықты анықтайды:

6. $f(x, y) = \sqrt{|x - y|}$

7. $f(x, y) = |\sin(x - y)|$

8. $f(x, y) = |x - y|^2$

9. $f(x, y) = \ln(1 + |x + y|)$

10. $f(x, y) = \cos^2(x - y)$

11. $f(t) = t + \frac{\pi}{2} \operatorname{arctg} t$ формуласымен анықталатын $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ бейнелеу

сығылған бола ма?

12. Айталық, $f(t)$ $[a, b]$ ны өзіне бейнелесін және Липшицтің

$|f(t) - f(s)| \leq \alpha |t - s|$ шартын қанағаттандырсын, мұндағы $0 < \alpha < 1$. $t = f(t)$

теңдеуінің $[a, b]$ да бір ғана шешімі болатынын дәлелдендер.

13. Үзіліссіз дифференциалданатын $f(t)$ функциясы $[a, b]$ кесіндісін өзіне бейнелесін, ал $|f'(t)| < 1$ болсын. $t = f(t)$ теңдеуінің $[a, b]$ да бір ғана шешімі болатынын дәлелдендер.

14. Айталық, $f(t)$ функциясы $\mathbb{R}$ де анықталған және үзіліссіз

дифференциалданатын болсын, $|f'(t)| \geq \lambda > 1$. $f(t) = t$ теңдеуінің жалғыз шешімі бар екенін дәлелдендер.

15. $2te^t = 1$ ($t \in \mathbb{R}$) теңдеуін қарастырайық. Теңдеудің $(0, 1)$ аралығына тиісті жалғыз шешімі бар екенін дәлелдеңіз. Бастапқы жуықтау ретінде $t_0 = 0$ деп, 0,01 дейінгі дәлдікпен шешімін табыңыз.

- 16-18. Егер метрика келесі түрде берілсе онда бүтін санды координаталары бар жазықтықтағы нүктелер жиыны $\mathbb{R}^2$ кеңістігіндегі кез келген жиын үшін ε -тор құрайтын ε нің барлық мәндерін табу керек:

16. $\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$

17. $\rho(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$

18. $\rho(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$

19. Егер $C[0,1]$ кеңістігіндегі $f(t)$ функцияларының M жиыны шенелген болса онда $F(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$ алғашқы функциялар жиыны алдын ала компакт болатынын дәлелдендер ($f(t) \in M$).

20. $[0,1]$ кесіндісінде үзіліссіз дифференциалданатын және мына шарттарды қанағаттандыратын $x(t)$ функцияларының жиыны E болсын: 1) $|x(t)| \leq 2$; 2) $|x'(t)| \leq 2$. $C[0,1]$ метрикасында E алдын ала компакт болатынын дәлелдендер.