Функциональный анализ
4 – курс

1. Понятие метрического пространства
2. Полные метрические пространства
3. Принцип сжимающих отображений и его применения
4. Теоремы существования и единственности для дифференциальных уравнений
5. Компактность в метрических пространствах

6-10. Какие из приводимых ниже функций определяют расстояние на множестве $\mathbb{R}$:

6. $f(x,y)=\sqrt{|x-y|}$
7. $f(x,y)=|\sin(x-y)|$
8. $f(x,y)=|x-y|^2$
9. $f(x,y)=\ln(1+|x+y|)$
10. $f(x,y)=\cos^2(x-y)$

11. Является ли сжимающим отображение $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},$ определяемое формулой $f(t)=t+\frac{\pi}{2}\operatorname{arctg} t$?

12. Пусть $f(t)$ отображает $[a,b]$ в себя и удовлетворяет условию Липшица $|f(t)-f(s)|\le\alpha|t-s|,$ где $0<\alpha<1.$ Доказать, что уравнение $t=f(t)$ имеет на $[a,b]$ единственное решение.

13. Пусть непрерывно дифференцируемая функция $f(t)$ отображает отрезок $[a,b]$ в себя, причем $|f'(t)|<1.$ Доказать, что уравнение $t=f(t)$ имеет на $[a,b]$ единственное решение.

14. Пусть функция $f(t)$ определена и непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R},$ причем $|f'(t)|\ge\lambda>1.$ Доказать, что уравнение $f(t)=t$ имеет единственное решение.

15. Рассмотрим уравнение $2te^t=1$ $(t\in\mathbb{R}).$ Доказать, что уравнение имеет единственное решение, которое принадлежит интервалу $(0,1).$ Найти решение с точностью до $0{,}01,$ взяв в качестве начального приближения $t_0=0.$

16-18. Найти все значения $\varepsilon,$ для которых множество точек на плоскости с целочисленными координатами образует ε - сеть для любого множества из пространства $\mathbb{R}^2,$ если метрика задается следующим образом:

16. $\rho(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$
17. $\rho(x,y)=|x_1-y_1|+|x_2-y_2|$

18. $\rho(x,y)=\max\{|x_1-y_1|,|x_2-y_2|\}$

19. Доказать, что если множество M функций $f(t)$ из пространства $C[0,1]$ является ограниченным, то множество первообразных $F(t)=\int_0^t f(\tau)d\tau$ предкомпактно $(f(t)\in M)$.

20. Пусть E - множество непрерывно дифференцируемых на отрезке $[0,1]$ функций $x(t)$, удовлетворяющих условиям: 1) $|x(t)|\le 2$; 2) $|x'(t)|\le 2$. Доказать, что E предкомпактно в метрике $C[0,1]$.