

Вопросы итоговой контрольной работы по предмету “Аналитическая геометрия” для студентов 1-го курса по направления “Математика”(1-семестр)

1. Понятие вектора. Коллинеарные и компланарные векторы. Операции сложения векторов и умножения на действительное число, основные правила.
2. Линейно независимые и линейно зависимые системы векторов и их свойства. Теоремы о разложении векторов.
3. Понятие базиса. Базис и размерность линейного пространства свободных векторов. Ортонормированный базис.
4. Координаты векторов в заданном базисе. Выражение операций сложения векторов и умножения на число через координаты. Длина вектора.
5. Аффинные и декартовы системы координат на плоскости.
6. Аффинные и декартовы системы координат в пространстве.
7. Деление отрезка в заданном отношении на плоскости.
8. Деление отрезка в заданном отношении в пространстве.
9. Скалярное произведение векторов. Определение и геометрические свойства скалярного произведения.
10. Выражение скалярного произведения в координатах. Операции над векторами, заданными координатами. Модуль вектора.
11. Правые и левые системы упорядоченных векторов. Векторное произведение двух векторов: определение, геометрические свойства.
12. Смешанное произведение трёх векторов. Геометрические свойства смешанного произведения.
13. Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов, заданных координатами.
14. Выражение векторного и смешанного произведений в координатах.
15. Расстояние между двумя точками. Площадь треугольника. Объём параллелепипеда и тетраэдра.
16. Преобразование декартовой системы координат на плоскости.
17. Полярная система координат. Введение полярной системы координат на плоскости. Связь между декартовой и полярной системами координат.
18. Введение цилиндрической системы координат в пространстве. Связь между декартовой и цилиндрической системами координат.
19. Введение сферической системы координат в пространстве. Связь между декартовой и сферической системами координат.
20. Уравнения прямой на плоскости. Общее уравнение прямой. Расположение прямой относительно координатных осей. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Параметрическое уравнение прямой. Уравнение прямой, проходящей через две точки. Уравнение прямой в отрезках.
21. Взаимное расположение прямых на плоскости.
22. Расстояние от точки до прямой. Задачи, связанные с прямыми.
23. Уравнения плоскости в пространстве.
24. Взаимное расположение плоскостей в пространстве.
25. Расстояние от точки до плоскости.
26. Общее уравнение плоскости. Неполные уравнения плоскости. Уравнение плоскости в отрезках.
27. Расстояние от точки до плоскости. Уравнение плоскости, проходящей через три точки, не лежащие на одной прямой. Параметрическое уравнение плоскости.
28. Уравнения прямой в пространстве. Параметрические и векторные уравнения прямой в пространстве. Каноническое уравнение прямой в пространстве. Уравнение прямой, проходящей через две точки. Прямая, образованная пересечением двух плоскостей.
29. Взаимное расположение прямых в пространстве.
30. Взаимное расположение прямых и плоскостей.
31. Основные задачи, связанные с прямыми и плоскостями.
32. Расстояние от точки до прямой в пространстве.
33. Расстояние между скрещивающимися прямыми.

Задачи

1. Найти смешанное произведение трех векторов $\vec{a} = \{2;1;0\}$, $\vec{b} = \{-1;0;4\}$, $\vec{c} = \{2;1;0\}$
2. В параллелограмме ABCD даны вершины A(1, -1), B(2, 3) и точка O(3;2) пересечения диагоналей. Найти уравнения сторон BC и DC.
3.

Написать каноническую уравнения заданной
4. уравнением:
$$\begin{cases} -x + y + z - 2 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}$$
5. Найти координаты вектора, представляющего собой векторное произведение вектора $\vec{a} = \{1;0;1\}$ на вектор $\vec{b} = \{3;1;-1\}$
6. Найти направляющий вектор прямой:
$$\begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ x + y - z - 1 = 0 \end{cases}$$
7. Вычислить
косинус угла между векторами $\vec{a}(2,-1,3)$ и $\vec{b}(1,-4,3)$.
8. Найти косинус угла между прямыми $x - 2y - 2z - 1 = 0$ и $x + 2y - 3z = 0$.
9. 4.Найти расстояние от точки $M(1;3;-2)$ до плоскости $x - 2y - z + 6 = 0$
10. 5.Найдите уравнение плоскости, проходящей через три данные точки: $M_1(1, -2, 3)$, $M_2(2, 1, 2)$, $M_3(2, -1, 1)$.
11. В треугольнике ABC: E и F – середины сторон AB и BC. Выразить векторы $\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{AC}$ через $\vec{a} = \vec{AE}, \vec{b} = \vec{AF}$.
12. Найдите угол между плоскостями: $x - 3y + z + 1 = 0$
и $3x + y - 2z + 1 = 0$
14. В параллелограмме ABCD даны вершины A(2, -1), B(1, -2) и C(3, 4).
Найти уравнение высоты ВН.
13. Найти векторное произведение вектора $\vec{a}(1, 1, 3)$ на вектор $\vec{b}(0, 2, 1)$.
14. Дан параллелепипед $ABCD A'B'C'D'$, построенный на векторах $\vec{AB}(4;3;0)$, $\vec{AD}(2;1;2)$ и $\vec{AA}'(-3;-2;5)$. Найти объём и высоту CH параллелепипеда.
15. Дан
треугольник ABC координатами своих вершин: A (2;1;0), B (-3;-6;4), C (-2;4;1). Найти: а) площадь треугольника; б) длину высоты ВН.
16. Написать уравнение прямой, проходящей через точку M(2, -1) параллельно прямой $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-1}$.
17. Найти расстояние от точки $(-5,6)$ до прямой $7x - 3y - 10 = 0$.

18. Найдите уравнение прямой проходящих через две точки

$M_1(2, 1, 2)$, $M_2(0, -2, 1)$.

19. Найти векторное произведение векторов $\vec{a} = (-1, 2, 1)$ и $\vec{b} = (3, 1, -1)$.

20. Составить канонические уравнения прямой по точке $M(-2;0;3)$ и направляющему вектору $\vec{a}(4;1;-5)$

21.

Найти

расстояния между точками $A(4;5;6)$ $B(-4;3;1)$,

22. Найти расстояние от точки $C(3;2)$ до прямой, проходящей через точки $A(1;2)$ и $B(5;2)$.

23. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(2, 1;2)$ параллельно прямой $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+6}{1}$.

24. Найти координаты основания высоты, опущенной из вершины В треугольника ABC, если вершины известны: $A(1, 1); B(2, 4); C(0, -1)$.

25. Найти расстояния между точками $A(1,0,-7,5,2)$, $B(4,5,-6,4,2)$

26. Найти угла φ между векторами \vec{a}, \vec{b} , если

$$\vec{a} = \{1, 2, 2, 3\}, \vec{b} = \{3, 1, 5, 1\}$$

27. Найти направляющий вектор прямой: $\begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ x + z - 1 = 0 \end{cases}$.

28. Найдите угол между плоскостями: $x - 3y + 4z + 6 = 0$

$$\text{и } 3x + y - 2z + 1 = 0$$

28. В V_4 даны векторы $a_1(-3; 4; 1; 0)$, $a_2(-2; -1; -3; 0)$, $a_3(1; 1; 2; 3)$, $a_4(2; -6; 0; 2)$.

Найти $\vec{p} = \vec{a}_1 - \frac{1}{2}\vec{a}_2 + \frac{1}{4}\vec{a}_4$

29. Написать уравнение прямой, проходящей через точку

$$M(2, -1; 5) \text{ параллельно прямой } \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-6}{-1}.$$

30. Найти угла между векторами $\vec{a} = \{1, 2, 2, 3\}, \vec{b} = \{3, 1, 5, 1\}$

31. Найдите уравнение плоскости, проходящей через три данные точки: $M_1(1, -2, 3)$, $M_2(2, 1, 2)$, $M_3(2, -1, 1)$.

32. Найти расстояние от точки $M(1;3;-2)$ до плоскости

$$x - 2y - z + 6 = 0$$

33. Даны векторы $\vec{a}(7, 2, 3, 4), \vec{b}(3, 5, 2, 5)$. Найти вектора $2\vec{a} + 3\vec{b}$

34. Найти расстояние от точки $M(-1; 3; 2)$ до плоскости $2x + y - z + 1 = 0$

35. Даны векторы $\vec{a}(8, 9, 0, 4), \vec{b}(0, 8, 1, 2)$. Найти $4\vec{a} - 5\vec{b}$

36. Найти направляющий вектор прямой: $\begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ x + y - z - 1 = 0 \end{cases}$

37. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}(1, 3, 5, 3, 2), \vec{b}(4, 1, 3, 0)$

38. Написать уравнение прямой, проходящей через точку

$M(2, 1; 2)$ параллельно прямой $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z+2}{1}$.

39. Найти длину вектора $\vec{b}(3, 5, 2, 5)$

40. Написать уравнение прямой, проходящей через точку

$M(2, 1; 2)$ параллельно прямой $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+6}{1}$.

41. Найти угол между векторами $\vec{a} = \{1, 2, 2, 3\}, \vec{b} = \{3, 1, 5, 1\}$

Найдите уравнение плоскости, проходящей через три данные точки:

42. $M_1(0, 0, 0), M_2(2, -1, 2), M_3(0, -1, 1)$.

43. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}(1, 3, 5, 3, 2), \vec{b}(4, 1, 3, 0)$

44. Составить канонические уравнения прямой по точке $M(-2; 0; 3)$ и направляющему вектору $\vec{a}(4; 1; -5)$

45. Найдите угол между плоскостями: $2x + 3y - z + 16 = 0$

$$\text{и } 3x - y - 4z + 10 = 0$$

46. Написать уравнение прямой, проходящей через точку

$M(2, 1; 2)$ параллельно прямой $\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+6}{5}$.

47. Найдите угол между плоскостями: $x - 3y - z + 8 = 0$

$$и 2x + y - z + 2 = 0$$

48.В Найти расстояние от точки $M(-1;3;2)$ до плоскости

$$2x + 3y - z + 16 = 0$$

49. Составить канонические уравнения прямой по точке $M(-4;1;3)$ и направляющему вектору $\vec{a}(-2;1;5)$

50. Написать уравнение прямой, проходящей через точку

$$M(2, 1;2) \text{ параллельно прямой } \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+6}{1}.$$