Центральное и параллельное проектирование. Изображение фигуры. Изображение плоских фигур в параллельной проекции.

Изображение плоских фигур в параллельной проекции.

Изображение пространственных фигур с помощью параллельного проектирования. Аксонометрия. Теорема Польке-Шварца.

Понятие проективного пространства. Модели проективной плоскости и проективного пространства.

Проективные координаты и преобразование проективных координат. Принцип двойственности. Теорема Дезарга.

Сложное отношение четырех точек прямой. Сложное отношение четырех прямых пучка.

Проективные преобразования. Группа проективных преобразований.

Гармонические четверки. Полный четырехвершинник и её гармонические свойства.

Кривые второго порядка на проективной плоскости и проективная классификация этих кривых. Полюс и поляра.

Теоремы Штейнера, Паскаля и Брианшона.

Геометрия на проективной плоскости с фиксированной прямой. Евклидова геометрия с проективной точки зрения.

Понятие топологического пространства. Топологическое пространство. Открытые и закрытые множества и их тросы. База топологического пространства. База топологического пространства. База в точке

Методы ввода топологии. Построение топологического пространства по базе. Внутренние, внешние и граничные точки. Свойства. Примеры.

Аксиомы соответствия.Аксиомы разделения топологических пространств. Подключение. Связанные и линейно связанные множества

Компактные пространства. Компактные и локально компактные пространства. Метрическое пространство

На расширенной прямой $\overline{d}$ задан проективный репер $\boldsymbol{R} = \{A_1, A_2, E\}$ построить точку $M(2, 3)$ по её координатам в этом репере.

На расширенной прямой $\overline{d}$ задан проективный репер $\boldsymbol{R} = \{A_1, A_2, E_\infty\}$. Построить точку $M(-1, 2)$ относительно репера $\boldsymbol{R}$.

На расширенной плоскости $\overline{\Pi}$ задан проективный репер $\boldsymbol{R} = \{A_1, A_2, A_3, E\}$. Построить точку $M(1, 1, 2)$ относительно репера $\boldsymbol{R}$.

На расширенной плоскости $\overline{\Pi}$ задан проективный репер $\boldsymbol{R} = \{A_1, A_2, A_3, E_\infty\}$, где точки A_1, A_2, A_3 – собственные, а точка E_∞ – несобственная. Построить точку $M(1, 1, 2)$ по её координатам в репере $\boldsymbol{R}$.

На расширенной плоскости $\overline{\Pi}$ задан проективный репер $\boldsymbol{R} = \{X_\infty, Y_\infty, A_3, E\}$. Построить точку $M(4, -1, 2)$ по её координатам в репере $\boldsymbol{R}$.

На расширенной плоскости $\overline{\Pi}$ задан проективный $\boldsymbol{R} = \{X_\infty, Y_\infty, A_3, E\}$ построить точку $M\ (4, -1, 2)$ по её координатам в репере $\boldsymbol{R}$.

1. На расширенной прямой $\overline{d}$ задан проективный репер $\boldsymbol{R} = \{A_1, A_2, E\}$. Построить точку $M(-2, 1)$ по её координатам в этом репере.

2. На расширенной прямой $\overline{d}$ задан проективный репер $\boldsymbol{R} = \{A_1, M_\infty, E\}$. Построить точку $M(2, 1)$ по её координатам в репере $\boldsymbol{R}$.

3. На расширенной прямой $\overline{d}$ задан проективный репер $\boldsymbol{R} = \{A_1, A_2, E\}$, где E – середина отрезка A_1A_2. Найти координаты несобственной точки M_∞ прямой $\overline{d}$ относительно репера $\boldsymbol{R}$.

4. На расширенной прямой $\overline{d}$ заданы точки A_1, A_2. Построить единичную точку E проективного репера $\boldsymbol{R} = \{A_1, A_2, E\}$, если известно, что несобственная точка M_∞ прямой $\overline{d}$ имеет координаты $M_\infty(-1, 2)$ в репере $\boldsymbol{R}$.

5. На расширенной плоскости $\overline{\Pi}$ задан проективный репер $\boldsymbol{R} = \{A_1, A_2, A_3, E\}$. Построить точку $M(1, 2, 1)$ по её координатам в репере $\boldsymbol{R}$.

6. Точка E – центр тяжести $\Delta\, A_1A_2A_3$ на плоскости $\overline{\Pi}$. Построить точку $M(1, 1, -1)$ по её координатам в проективном репере $\boldsymbol{R} = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ на расширенной плоскости $\overline{\Pi}$.

7. На расширенной плоскости $\overline{\Pi}$ задан проективный репер $\boldsymbol{R} = \{A_1, A_2, M_\infty, E\}$. Построить точку $M(1, 1, 2)$ по её координатам в репере $\boldsymbol{R}$.

На проективной плоскости задан репер

$\boldsymbol{R} = \{A_1, A_2, A_3, E\}$. E_α – проекция точки E из центра A_α на прямую $(A_\beta A_\gamma)$ $(\alpha,\ \beta,\ \gamma = \overline{1,3})$. Найти уравнения координатных прямых $(A_\alpha A_\beta)$ и $(A_\alpha E_\alpha)$ относительно $\boldsymbol{R}$.

Найдите координаты точки пересечения прямых $2x^1 + x^2 + x^3 = 0$ и $3x^1 + 3x^2 + 2x^3 = 0$.

Построить прямую $x^1 + 2x^2 - 2x^3 = 0$ по её координатам относительно проективного репера $\boldsymbol{R}$ на расширенной плоскости.

1. Найти уравнение прямой на $\boldsymbol{P}_2$ относительно репера $\boldsymbol{R} = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ если она проходит через точки $A(2, 3, 2)$, $B(4, -1, 0)$.

2. Написать параметрические уравнения прямой, проходящей через точки $A(1, 1, 2)$, $B(2, 3, 1)$, имеющие координаты относительно репера $\boldsymbol{R}$.

3. Найти точку пересечения прямых $2x^1 - 3x^2 + 5x^3 = 0$ и $x^1 + x^2 + 3x^3 = 0$, имеющие данные уравнения относительно репера $\boldsymbol{R}$.

4. Доказать, что на $\boldsymbol{P}_2$ прямая $a(a^1, a^2, a^3)$ с координатами относительно репера $\boldsymbol{R} = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ проходит через вершину A_α тогда и только тогда, когда $a_\alpha = 0$.

5. Какова особенность расположения точки M пересечения прямых $a(a^1, a^2, a^3)$, $b(b^1, b^2, b^3)$ относительно репера $\boldsymbol{R}$ если первые пары координат этих прямых пропорциональны?

6. Какова особенность прямой $l(1, 1, 1)$ относительно проективного репера $\boldsymbol{R} = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ на расширенной плоскости, если единичная точка репера является точкой пересечения медиан координатного треугольника.

7. Доказать, что прямые $a(a^1, a^2, a^3)$, $b(b^1, b^2, b^3)$, $c(c^1, c^2, c^3)$ с координатами относительно репера $\boldsymbol{R}$ имеют общую точку тогда и только тогда, когда:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

8. Единичная точка E репера $\boldsymbol{R} = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ на расширенной плоскости является точкой пересечения медиан $\Delta A_1A_2A_3$. Найти координаты несобственных точек сторон $\Delta A_1A_2A_3$ и координаты несобственных точек его медиан относительно репера $\boldsymbol{R}$.

9. Построить прямую $a(1, 2, -2)$ по её координатам относительно заданного на расширенной плоскости проективного репера $\boldsymbol{R} = \{A_1, A_2, A_3, E\}$.

10. В пучке прямых на $\boldsymbol{P}_2$, заданном парой прямых $2x^1 - 3x^2 + 5x^3 = 0$ и $x^1 + x^2 + 3x^3 = 0$ относительно репера $\boldsymbol{R} = \{A_1, A_2, A_3, E\}$, найти прямую проходящую через точку $A(1, 1, 3)$.

Составить формулы преобразования проективных координат при переходе от репера $\boldsymbol{R} = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ к реперу $\boldsymbol{R}' = \{A_1', A_2', A_3', E'\}$, если в репере $\boldsymbol{R}$: $A_1'(1,\ 0,\ -1)$, $A_2'(2,\ 1,\ 0)$, $A_3'(0,\ 0,\ 1)$; а) $E'(3,\ 1,\ 0)$, б) $E'(1,\ 1,\ 2)$.

1. Написать формулы преобразования координат при переходе от системы $\boldsymbol{R} = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ к системе $\boldsymbol{R}' = \{A_1', A_2', A_3', E'\}$, если:

а) $A_1' = A_2,\ A_2' = A_3,\ A_3' = A_1,\ E' = E$;

б) $A_1' = A_2,\ A_2' = A_2,\ A_3' = A_3,\ E' = E$;

в) $A_1' = A_1,\ A_2' = A_2,\ A_3' = E,\ E' = A_3$.

2. Написать формулы преобразования координат при переходе от системы координат $\boldsymbol{R} = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ к системе $\boldsymbol{R}' = \{A_1, A_2, A_3, E'\}$, если E' в исходной системе координат имеет координаты (–1, 2, 3).

3. Написать формулы преобразования координат, если точки A_1', A_2', A_3', E', определяющие репер $\boldsymbol{R}'$, имеют относительно старой системы координат $\boldsymbol{R} = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ следующие координаты: $A_1'(1, 1, 0)$, $A_2'(0, -1, 2)$, $A_3'(1, 1, 1)$, $E'(2, 3, -5)$.

4. На плоскости даны 2 системы координат: $\boldsymbol{R} = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ и $\boldsymbol{R}' = \{A_1', A_2', A_3', E'\}$, точки A_1', A_2', A_3', E' имеют в координатной системе $\boldsymbol{R}$ следующие координаты:

$A_1'(1,\ -1,\ 1)$, $A_2'(1,\ 0,\ 1)$, $A_3'(2,\ 1,\ -3)$, $E'(5,\ -4,\ 0)$.

а) Найти координаты точки M в системе $\boldsymbol{R}'$, если известны ее координаты в системе $\boldsymbol{R}$: $M(1, 1, 1)$.

б) Найти уравнение прямой в репере $\boldsymbol{R}'$, если известно ее уравнение с репере $\boldsymbol{R}$: $x^1 + 2x^2 = 0$.

в) Найти уравнение прямой в системе $\boldsymbol{R}$, если известно ее уравнение с системе $\boldsymbol{R}'$: $y^1 + 2y^2 = 0$.

5. Вершины координатного треугольника и единичная точка проективного репера $\boldsymbol{R}'$ имеют на расширенной плоскости следующие аффинные координаты: $A_1'(0, 3)$, $A_2'(4, 0)$, $A_3'(4, 3)$, $E'(3, 2)$

Найти:

а) проективные координаты точки M, если ее аффинные кординаты $M(1, 1)$;

б) аффинные координаты точки P, если ее проективные координаты $P(4, 3, –6)$.

в) проективные координаты несобственной точки оси абсцисс;

г) проективные координаты несобственной точки оси ординат;

д) проективные координаты несобственной точки прямой $x – 2y + 1 = 0$;

е) однородные координаты точки K, если ее проективные координаты $K(5, 5, –7)$.

6. Единичная точка E проективного репера $\boldsymbol{R} = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ на расширенной плоскости является точкой пересечения медиан координатного треугольника $A_1A_2A_3$. Найти координаты несобственных точек сторон координатного треугольника и координаты несобственных точек его медиан относительно репера $\boldsymbol{R}$.

7. В прямоугольных декартовых координатах дано уравнение кривой $x^2 – 2xy + y^2 + 4x + 4y – 8 = 0$.

Найти:

а) уравнение данной кривой в однородных координатах;

б) несобственные точки кривой, доказав при этом, что данная кривая является параболой;

в) направляющий вектор оси параболы;

г) координаты вершины и уравнение оси параболы в неоднородных координатах.

На чертеже ограниченных размеров заданы две пары прямых: p и q, пересекающиеся в недоступной точке A, и u и v, пересекающиеся в недоступной точке B. Построить доступную часть прямой AB.

На евклидовой плоскости даны параллелограмм $NKLM$, прямая n и точка A, не принадлежащая ни прямой n, ни сторонам параллелограмма. Пользуясь одной линейкой, проведите прямую через данную точку параллельно прямой n.

На евклидовой плоскости трапеция вписана в четырёхугольник так, что её параллельные стороны параллельны одной из его диагоналей. Докажите, что непараллельные стороны трапеции пересекаются на другой диагонали.

1. На чертеже ограниченных размеров заданы точка A и пара прямых p и q, пересекающихся за пределами чертежа (в недоступной точке B). Построить доступную часть прямой (AB).

2. С помощью одной линейки через данную точку A провести прямую параллельную двум заданным параллельным прямым p и q.

3. На евклидовой плоскости даны параллелограмм $ABCD$, точка M, принадлежащая одной из сторон параллелограмма и прямая n. Пользуясь одной линейкой, провести прямую через точку M параллельно прямой n.

4. Даны прямая n и не лежащие на ней точки M и N. Пользуясь одной линейкой, построить точку пересечения прямой n с MN, не строя прямой MN.

5. Доказать, что: а) если прямые (AA'), (BB'), (CC'), соединяющие вершины треугольников ABC и $A'B'C'$, параллельны и точки $(AB) \cap (A'B')$, $(BC) \cap (B'C')$, $(AC) \cap (A'C')$ существуют, то эти точки лежат на одной прямой; б) если $(AB) \parallel (A'B')$, $(BC) \cap (B'C') = M$, $(AC) \cap (A'C') = N$, то $(MN) \parallel AB$; в) если $(AB) \parallel (A'B')$, $(BC) \parallel (B'C')$, то $(AC) \parallel (A'C')$.

6. Трапеция $ABCD$ пересечена прямыми p и q, параллельными основанию AB, $p \cap (AD) = M$, $p \cap (AC) = P$, $q \cap (BD) = N$, $q \cap (BC) = Q$. Доказать, что точка $(MN) \cap (PQ)$ лежит на (AB).

7. Используя теорему Дезарга, доказать, что медианы треугольника пересекаются в одной точке.

8. Доказать, что центр симметрии параллелограмма $ABCD$ совпадает с центром симметрии параллелограмма $A'B'C'D'$, если на евклидовой плоскости вершины параллелограмма $ABCD$ лежат на сторонах параллелогремма $A'B'C'D'$, так что $A \in (A'B')$, $B \in (B'C')$, $C \in (C'D')$, $D \in (D'A')$.

Доказать, что для пяти различных точек *A, B, M, U, V,* проективной прямой имеет место:

$(AB, MV) = (AB, MU)\ (AB, UV)$.

На проективной плоскости заданы четыре точки A =(1:1:2), B=(3:1:2), C=(11: 1:10), D =(6:4:10). Доказать, что эти точки лежат на одной прямой, и найти ангармоническое отношение (ABCD).

Прямые a и b пересекаются в точке C, прямые c и d содержат биссектрисы углов, образованных прямыми a и b. Доказать, что $(AB, CD) = -1$.

1. Доказать, что прямая $a(1, 1, 1)$ пересекает стороны координатного треугольника проективного репере $\boldsymbol{R} = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ в точках M_γ, таких, что $(A_\alpha, A_\beta, E_\gamma, M_\gamma) = -1$, $(\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3)$.
2. Даны точки A(1,2,4), B(5,0,4), C(3,1,4), D(2,-1,0). В репере R$\{A_1, A_2, A_3, E\}$. Доказать их коллинеарность и найти сложный отношения (AB, CD) и (DB, CA).

Составить уравнение линии второго порядка, проходящей через пять точек:

A =(0:0:1);B =(0:1:1);C =(1:0:1);D =(2: 5:1);E =(5:2:1):

1. Построить сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки M, N, P, принадлежащие боковым граням.

2. Дано изображение пятиугольной пирамиды. Изобразить сечение пирамиды плоскостью, заданной тремя точками A, B, C на её рёбрах.

3. Дано изображение четырёхугольной пирамиды. Построить сечение пирамиды плоскостью (PEK), заданной тремя точками P, E, K на её рёбрах.

4. Построить сечение четырехугольной правильной пирамиды $SABCD$ плоскостью, проходящей через точки M,O,N.

5. Построить сечение пятиугольной призмы плоскостью, заданной тремя точками A, B, C, произвольно выбранными на ее ребрах

6. Дано изображение параллелепипеда ABCDA'B'C'D' и точек M, N и P, лежащих соответственно на ребрах AA', BB' и CC'. Построить сечение параллелепипеда плоскостью MNP.

7. На ребрах BC, AC и CC′ призмы ABCA ‘B ‘C’ заданы соответственны точки P, Q, R, а на ребрах AB и B C′ ′- соответственно точки U и V. На отрезке UV задана точка K. Построить сечение призмы плоскостью, проходящей через точку K, параллельно плоскости PQR.

8. Построить сечение пятиугольной пирамиды плоскостью, определяемой тремя точками A, B и C, данными на ее ребрах

Дано изображение параллелепипеда ABCDA'B'C'D' и точек M, N и P, лежащих соответственно на ребрах AA', BB' и CC' . Построить сечение параллелепипеда плоскостью MNP.

Построить сечение пятиугольной пирамиды плоскостью, заданной тремя точками M, N и K на боковых ребрах.

Построить сечение четырехугольной призмы, проходящее через три точки, две из которых лежат на ребрах призмы, а одна — на боковой грани.

Пусть нам дано (X,τ) топологических пространств и $A \subset (X,\tau)$ его подмножеств. Тогда докажите, что:

$\overline{A} = A \cup \partial A$

$\overline{X / A} = X / IntA$

$\partial A = \overline{A} / IntA$

$\partial A = \overline{A} \cap \overline{CA}$

$\overline{A} = \operatorname{int} A \cup \partial A$

$\operatorname{int} A = A / \partial A$

$\partial(\operatorname{int} A) \subset \partial A$

$\partial(X / A) = \partial A$

$\partial \overline{A} \subset \partial A$

$\partial(A \cap B) \subset \partial A \cup \partial B$

$\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$

$\overline{A} = A \cup \partial A$

$\overline{A} = A \cup \partial A$