

1	Көп айнымалы функциялар Көп айнымалы функция туралы түсінік. $\mathbf{R}^m$ кеңістігінің үлес жиындары m айнымалы функциясының анықталу облысы ретінде.
2	Екі айнымалы функцияның графигі.
3	Деңгей сызықтары мен беттері түсінігі.
4	Көп айнымалы функцияның лимиті және үзділсіздігі $\mathbf{R}^m$ кеңістіктегі нүктенің шеңбері. $\mathbf{R}^m$ кеңістігіндегі нүктелер тізбегі және оның шегі, m айнымалы функцияның шегі.
5	Қайталанатын шектер.
6	Қайталанатын шектер.
7	Үздіксіздік анықтамалары. Көп айнымалы үзіліссіз функцияның қасиеттері. Күрделі функцияның үзіліссіздігі.
8	Көп айнымалы функцияларды дифференциалдау.
9	Дара туындылар.
10	Көп айнымалы дифференциалданатын функция. Дифференциалданатын болудың қажетті, жеткілікті шарттары.
11	Көп айнымалы функцияның толық дифференциалы. Дифференциалдың жуық есептеуге қолданылуы. Бағыт бойынша туынды. Градиент.
12	Көп айнымалы функциялардың экстремумдары Көп айнымалы функциялардың экстремумдары
13	Экстремумның қажетті шарты. Екі айнымалы функция үшін экстремумның жеткілікті шарты.
14	Ең үлкен және ең кіші мәндерді іздеу.
15	Шартты экстремумдар.

1. Төмендегі берілген функцияның анықталу облысын табыңыз.

2. $F(x, y) = \frac{1}{x + y}$

3. $F(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

4. $F(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

5. $F(x, y) = \sqrt{y \sin x}$
6. $F(x, y) = \ln(x + y)$
7. $F(x, y) = 1 + \sqrt{-(x - y)^2}$
8. $F(x, y) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y}$
9. $F(x, y) = \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{1 - y^2}$
10. $F(x, y) = \sqrt{\sin(x^2 + y^2)}$
11. $F(x, y) = xy + \sqrt{\ln \frac{9}{x^2 + y^2}} + \sqrt{x^2 + y^2 - 9}$
12. $F(x, y) = \sqrt{(x^2 + y^2 - 1)(4 - x^2 - y^2)}$
13. $F(x, y) = \sqrt{x + y}$
14. $F(x, y) = \sqrt{-x} + \sqrt{y}$
15. $F(x, y) = \arccos \frac{x^2 + y^2}{9}$
16. $F(x, y) = \sqrt{x - \sqrt{y}}$
17. $F(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{x - y}{1 + x^2 y^2}$
18. $F(x, y) = \ln\left(\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} - 1\right)$
19. $f(x, y) = \frac{\sqrt{4x - y^2}}{\ln(1 - x^2 - y^2)}$
20. $f(x, y) = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 - x}{2x - x^2 - y^2}}$
21. $f(x, y) = \ln(-x - y)$
22. $f(x, y) = \arcsin\left(\frac{x}{y^2}\right) + \arcsin(1 - y)$
23. $\dot{f}(x, y) = \sqrt{\frac{x^2 + 2x + y^2}{x^2 - 2x + y^2}}$

Еселі лимитті табың

$$1. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{a - \sqrt{a^2 - xy}}{xy}, \quad (a \neq 0)$$

$$2. \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\tan(xy)}{xy}$$

$$3. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{xy}\right)$$

$$4. \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x+y}{x^2+y^2}$$

$$5. \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow a}} \left(1 + \frac{y}{x}\right)^x$$

$$6. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{1+x^2y^2}-1}{x^2+y^2}$$

$$7. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(x^4y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$8. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (xy)^{2(x^2+y^2)}$$

$$9. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1}{e^{\frac{1}{x^4+y^4}}}$$

$$10. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$$

$$11. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (1+x^2+y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$$

$$12. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt[3]{x^4y^2}}{x^2+y^2}$$

$$13. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2+y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$$

$$14. \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} (x^2+y^2) \ln\left(1 + \sin \frac{1}{x^2+y^2}\right)$$

$$15. \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$$

$$16. \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} (x+y)e^{-(x^2+y^2)}$$

$$17. \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x^2 + y^2}{|x^3| + |y|^3}$$

$$18. \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} (x^2 + y^2)^{|x|}$$

$$19. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2)x^2y^2$$

$$20. \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(x + e^y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

1. Төмендегі функцияларды үзіліссіздікке тексеріп, үзіліс нүктесін табыңыз.

$$2. f(x, y) = \frac{10x}{(x-1)^2 + (y-1)^2}$$

$$3. f(x, y) = \frac{3y}{2x - y}$$

$$4. f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2 - y^2}, & \text{eger } x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0, & \text{eger } x^2 + y^2 > 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{bolsa,} \\ \text{bolsa.} \end{matrix}$$

$$5. f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}$$

$$6. f(x, y) = \frac{2x - 3}{x^2 + y^2 - 4}$$

$$7. f(x, y) = \frac{x - y^2}{x + y^2}$$

$$8. f(x, y) = \frac{x - y}{x^3 - y^3}$$

$$9. f(x, y) = \ln(9 - x^2 - y^2)$$

$$10. f(x, y) = \frac{3}{x^2 + y^2}$$

$$11. f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$12. f(x, y) = \frac{-xy}{x + y}$$

$$13. f(x, y) = \sin\left(\frac{1}{xy}\right)$$

$$14. f(x, y) = \frac{1}{\sin x \cdot \sin y}$$

$$15. f(x, y) = \cos\left(\frac{1}{x^2 + y^2 - 9}\right)$$

16. Қайталама шекті есептеңіз

$$17. f(x, y) = \begin{cases} \frac{x - y + x^2 + y^2}{x + y}, & x \neq -y, \\ 0, & x = -y, \end{cases} \quad (0, 0)$$

$$1. f(x, y) = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 - xy + y^2}, \quad (0, 0)$$

$$2. f(x, y) = \frac{\sin(x + y)}{2x + 3y}, \quad (0, 0)$$

$$3. f(x, y) = \frac{\cos x - \cos y}{x^2 + y^2}, \quad (0, 0)$$

$$4. f(x, y) = \frac{\sin |x| - \sin |y|}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (0, 0)$$

$$5. f(x, y) = \frac{\sin 3x - \operatorname{tg} 2y}{6x + 3y}, \quad (0, 0)$$

$$6. f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^4}, \quad (\infty, \infty)$$

$$7. f(x, y) = \frac{x^y}{1 + x^y}, \quad (\infty, 0)$$

$$8. f(x, y) = \sin \left(\frac{nx}{2x + 3y} \right), \quad (\infty, \infty)$$

$$9. f(x, y) = \frac{\sin x + \sin y}{x + y}, \quad (0, 0)$$

$$10. f(x, y) = \frac{1}{xy} \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{xy}{1 + xy} \right), \quad (0, \infty)$$

$$11. f(x, y) = \log_x(x + y), \quad (1, 0)$$

$$12. f(x, y) = \frac{x^2 \sin \left(\frac{1}{x} \right) + y}{x + y}, \quad (0, 0)$$

$$13. f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{|x| - |y|}, & |x| \neq |y|, \\ 0, & |x| = |y|, \end{cases} \quad (0, 0)$$

$\mathbb{R}^n$ кеңістікте $\{x^{(n)}\}$ тізбектің лимитін есептеңіз.

$$1. \{x^{(n)}\} = \left(\left(\frac{n-1}{n} \right)^5, \frac{n^3 + 27}{n^4 - 15} \right)$$

$$2. \{x^{(n)}\} = \left(\frac{2^{n+2} + 3^{n+3}}{2^n + 3^n}, \frac{5 \cdot 2^n - 3 \cdot 5^{n+1}}{100 \cdot 2^n + 2 \cdot 5^n} \right)$$

$$3. \{x^{(n)}\} = (\sqrt[3]{8}, \sqrt{0.5})$$

$$4. \{x^{(n)}\} = \left(\frac{\sqrt[3]{8} - 1}{\sqrt[3]{2} - 1}, \frac{a+2}{4^{n+1}} \right)$$

$$5. \{x^{(n)}\} = \left((1+11^n)^{\frac{1}{n+2}}, a^{\frac{1}{n+p}} \right), a > 0, p > 0$$

$$6. \{x^{(n)}\} = \left(\sqrt[n]{n^2}, \sqrt[n]{n} \right)$$

$$7. \{x^{(n)}\} = \left(\sqrt[n]{3n-2}, \sqrt[n]{\frac{n^3+3n}{n^4-15}} \right)$$

$$8. \{x^{(n)}\} = \left(\frac{\log_3(n^2+1)}{n}, \frac{n - \lg n}{\log_2(4^n+1)} \right)$$

$$9. \{x^{(n)}\} = \left(\frac{(-2)^n}{(n+2)!}, \frac{1}{(0.3)^n n!} \right)$$

$$10. \{x^{(n)}\} = \left(\frac{n \cdot 3^n + 1}{n! + 1}, \frac{4^n + n^2 \cdot 2^n - 1}{n^4 + (n!)^2} \right)$$

$$11. \{x^{(n)}\} = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}, \prod_{k=1}^n 2^{1/2^k} \right)$$

1. Екінші ретті туындысын табыңыз.

$$2. f(x, y) = xy - \frac{x}{y}$$

$$3. f(x, y) = (x^2 + y^2)^3$$

$$4. f(x, y) = x - 3 \sin y$$

$$5. f(x, y) = \frac{y}{x} e^{xy}$$

$$6. f(x, y) = \arctg(xy)$$

$$7. f(x, y) = y^3 \sqrt{x}$$

$$8. f(x, y) = \sqrt{2xy + y^2}$$

$$9. f(x, y) = \sin(xy)$$

$$10. f(x, y) = (1+x)^n (1+y)^n$$

$$11. f(x, y) = 2 \cos^2 \left(y - \frac{x}{2} \right)$$

$$12. f(x, y) = e^x \ln y + \sin y \cdot \ln x$$

$$13. f(x, y) = \operatorname{arccot}(x+2y)$$

14. Көрсетілген тәртіптегі туындысын табыңыз.

$$15. f(x, y) = y \ln(xy), \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}$$

1. $f(x, y) = \arctg\left(\frac{y}{x}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$
2. $f(x, y) = x \cos y + y \sin x, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}$
3. $f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}, \quad \frac{\partial^{10} f}{\partial x^6 \partial y^4}$
4. $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{x+y}, \quad \frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n}$
5. $f(x, y) = e^x \sin y, \quad \frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n}$

Тейлор қатарына жайыңыз

1. $f(x, y) = -x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 2y - 4$ функцияның $n=3$ болғандағы $(-2;1)$ нүкте төңірегіндегі Тейлор формуласын жазыңыз.
2. $f(x, y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ функциясының $n=3$ болғандағы $(0;0)$ нүктесінің төңірегіндегі Тейлор формуласын жазыңыз.
3. $f(x, y) = e^x \sin y$ функцияның $n=3$ болғандағы $(0;0)$ нүктенің төңірегіндегі Тейлор формуласын жазыңыз.
4. $f(x, y) = \cos x \cdot \cos y$ функцияның $n=3$ болғандағы $(0;0)$ нүкте төңірегіндегі Тейлор формуласын жазыңыз.
5. $f(x, y) = y^x$ функцияның $n=2$ болғандағы $(1;1)$ $(0;0)$ нүкте төңірегіндегі Тейлор формуласын жазыңыз.