

1. Понятие двойного интеграла. Основные определения и свойства.
2. Связь между криволинейными интегралами первого и второго рода. Формула перехода.
3. Криволинейный интеграл первого рода: определение, способ вычисления, приложения.
4. Тройной интеграл: определение, основные свойства, теорема о сведении к повторному интегралу.
5. Формула Грина и ее приложения (вычисление площадей, работа поля).
6. Условие независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования.
7. Ряды Фурье: понятие, ортогональность тригонометрической системы, коэффициенты Фурье.
8. Замена переменных в тройном интеграле. Цилиндрические и сферические координаты.
9. Интегрируемость непрерывных функций. Класс интегрируемых функций.
10. Криволинейный интеграл второго рода: понятие, свойства, вычисление.
11. Двойной интеграл. Вычисление через повторные интегралы. Теорема Фубини.
12. Вычисление площадей плоских фигур с помощью криволинейных интегралов.
13. Основные свойства криволинейного интеграла второго рода.
14. Замена переменных в двойном интеграле. Полярные координаты. Якобиан.
15. Условие независимости криволинейного интеграла от пути. Полный дифференциал.
16. Вычислите $\iint_D (x + y) dx dy$, где $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$.
17. Вычислите $\int_L x ds$, где L – дуга окружности $x^2 + y^2 = 4$ от точки $(2, 0)$ до $(0, 2)$.
18. Вычислите $\oint_L (x^2 - y)dx + (y^2 + x)dy$, где L – контур квадрата с вершинами $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$, обходимый против часовой стрелки.
19. Вычислите $\int_L (x + y) dl$, где L – отрезок прямой, соединяющий точки $O(0, 0)$ и $A(3, 4)$.
20. Вычислите $\iint_D e^{-(x^2+y^2)} dx dy$, где D – круг $x^2 + y^2 \leq R^2$, переходя к полярным координатам.
21. С помощью формулы Грина вычислите $\oint_L (y^2 dx + x^2 dy)$, где L – контур треугольника с вершинами $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$, обходимый против часовой стрелки.
22. Вычислите $\iiint_V (x + y + z) dx dy dz$, где $V = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3\}$.
23. Вычислите площадь области D , ограниченной кривой $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, используя формулу $S = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx$.
24. Вычислите $\int_L (2xy + \sin x)dx + (x^2 - \cos y)dy$, где L – дуга параболы $y = x^2$ от $(0, 0)$ до $(1, 1)$. Обоснуйте независимость результата от пути интегрирования.

25. Вычислите $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, где D ограничена прямыми $x = 0, y = 0, x + y = 1$.
26. Вычислите $\int_L \sqrt{x^2 + y^2} ds$, где L – винтовая линия $x = R \cos t, y = R \sin t, z = ht, t \in [0, 2\pi]$.
27. Вычислите $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$, где V – шар $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, перейдя к сферическим координатам.
28. Найдите массу кривой $L : y = x^2, x \in [0, 1]$, если линейная плотность $\rho(x, y) = x + y$.
29. Вычислите $\int_L (x - y)dx + (x + y)dy$, где L – верхняя полуокружность $x^2 + y^2 = 1, y \geq 0$, обходимая от $(-1, 0)$ до $(1, 0)$.
30. Вычислите $\iint_D \frac{x}{y} dx dy$, где $D = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 2, 1/x \leq y \leq x\}$, изменив порядок интегрирования.
31. Вычислите $\int_L x dx + y dy$, где L – дуга параболы $y = x^2$ от $(0, 0)$ до $(1, 1)$.
32. Вычислите $\iiint_V x dx dy dz$, где V – тетраэдр, ограниченный плоскостями $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$.
33. Вычислите площадь области D , ограниченной параболой $y = x^2 - 2x$ и прямой $y = x$, с помощью двойного интеграла.
34. Вычислите $\iint_D 5 dx dy$, где D – круг $x^2 + (y - 1)^2 \leq 1$.
35. Вычислите $\int_L (x^2 + y) ds$, где L – ломаная OAB с вершинами $O(0, 0), A(1, 0), B(1, 2)$.
36. Используя формулу Грина, вычислите $\oint_L (e^x \sin y - 3y)dx + (e^x \cos y + x)dy$, где L – эллипс $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, обходимый против часовой стрелки.
37. Вычислите $\int_L y dx + x dy$ по окружности $x^2 + y^2 = 4$, обходимой один раз против часовой стрелки.
38. Вычислите $\iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy$, где D – полукруг $x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0$, перейдя к полярным координатам.
39. Вычислите $\iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz$, где V – тело, ограниченное поверхностями $z = x^2 + y^2$ и $z = 4$, используя цилиндрические координаты.
40. Вычислите $\iint_D xy dx dy$, где D – треугольник с вершинами $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$.
41. Вычислите $\int_L (x + y)dx + (x - y)dy$, где L – отрезок прямой от точки $(1, 0)$ до $(0, 1)$.