База вопросов для письменной работы по геометрии для государственной аттестации

1. Найдите расстояние от точки $(2,-4)$ до прямой $x+2y-5=0$.

2. Если $\vec{r}(t)=\{\sin t, \cos^2 t, \sin t\cos t\}$, найдите координаты вектор-функции $\vec{r'}(t)$.

3. Найдите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}\{-3,1,2\}$, $\vec{b}\{1,2,-4\}$.

4. Составьте уравнение кривой второго порядка, проходящей через данные точки $A_0(1;0;0)$, $B_0(0;0;1)$, $C_0(0;1;0)$, $D_0(-2;2;1)$, $E_0(0;-1;2)$.

5. При каком значении α векторы $\vec{a}(1,\alpha,-1), \vec{b}(-1,1,-\alpha), \vec{c}(2,2,3)$ компланарны?

6. Даны точки $M_1(2,4)$ и $M_2(-2,4)$. Найдите координаты точки C, делящей отрезок M_1M_2 в отношении $\lambda=3$.

7. Найдите угол между и прямыми $\frac{x-7}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-9}{-1}$ и $\frac{x-3}{-7}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{-3}$.

8. Даны прямые линии $a: x_1+x_2-x_3=0$ и $b: 2x_1+x_2-2x_3=0$. Найдите точку $M=a\cap b$.

9. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $A(1,2,-3)$ и несобственную точку прямой $2x_1-x_2+3x_3=0$.

10. Найдите уравнение нормали в точке M(3; 1;-1) поверхности $x^2-2y^2-3z^2-4=0$.

11. Найдите точку пересечения прямой $2x_1+x_2+x_3=0$, проходящей через точки M (1:1:6) и N (2:-1:0).

12. Приведите уравнение кривой второго порядка $20x_2^2+10x_1x_2-3x_2x_3=0$ к каноническому виду и определите его вид.

13. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1,-1,3)$ и параллельной к плоскости $2x-y+z+5=0$.

14. Найдите производную $\vec{R}'(t)$ вектор-функции $\vec{R}(t)=[[\vec{r}'\,\vec{r}'']\,\vec{r}''']$. Здесь $\vec{r}=\vec{r}(t)$.

15. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку A(4:-2:5) и точку пересечения прямых $x_1+x_2-x_3=0$ и $2x_1-x_2+4x_3=0$.

16. Найти центр линии $2x^2+3xy+4y^2-5x+2y-1=0$ второго порядка.

17. Найдите точку пересечения прямой $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-5}{2}$ и плоскости $2x+3y+2z+2=0$.

18. Найдите центр и радиус сферы $x^2+y^2+z^2-4x-6y-2z+13=0$.

19. Найдите расстояние от точки М$(1,2,0)$ до плоскости $2x+y-4z+5=0$.

20. Напишите уравнение сферы с вершинами диаметра в точках $A(5,-7,12)$ и $B(-1,1,-12)$ точками .

21. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точки $A(3,-1,2)$, $B(4,-1,-1)$, $C(2,0,2)$.

22. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $(4,5,2)$, $(6,2,4)$ и параллельной вектору $\{1,2,1\}$.

23. Даны шесть точек: $A(10;5;1)$, $B(8;1;1)$, $C(2;8;1)$, $P(-4;-3;1)$, $D(2;-2;1)$, $O(0;7;1)$. Покажите, что прямые AP, BD и CO пересекаются в одной точке.

24. Прямая $4x-5y-40=0$ касается эллипса $\dfrac{x^2}{50}+\dfrac{y^2}{32}=1$. Найдите точку касания.

25. Найдите точку пересечения прямых $x_1+x_2+2x_3=0$ и $x_1+3x_2+2x_3=0$.

26. Напишите уравнение касательной к гиперболе $\dfrac{x^2}{20}-\dfrac{y^2}{5}=1$, перпендикулярной прямой $4x+3y-7=0$.

27. Даны прямые линии $c: x_1 - x_2 - x_3 = 0$ и $d: 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$. Найдите точку $N = c \bigcap d$.

28. Найдите кручение линии $x = e^t$, $y = e^{-t}$, $z = \sqrt{2}t$.

29. Дан угол $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$ между векторами $|\vec{a}| = \sqrt{3}, |\vec{b}| = 1$. Найдите угол между векторами $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$.

30. Найдите координаты вектора $\vec{x}$, удовлетворяющего уравнению $\vec{x}(\vec{i} + 2\vec{j} - 7\vec{k}) = 10$ и перпендикулярного вектору $\vec{a}(2;-3;1)$ и $\vec{b}(1;-2;3)$.

31. Найдите площадь треугольника с вершинами и точками $A(7;3;4)$, $B(1;0;6)$ и $C(4;5;-2)$.

32. Вычислите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB} = \vec{m} + 2\vec{n},\ \overrightarrow{AD} = \vec{m} - 3\vec{n}$. Здесь $|\vec{m}| = 5,\ |\vec{n}| = 3,\ (\vec{m}\hat{\ }\vec{n}) = 30^0$.

33. Напишите уравнение касательной к эллипсу $\dfrac{x^2}{15} + \dfrac{y^2}{9} = 1$, проведенной из точки $A(-6;3)$.

34. Составьте уравнение касательной к линии $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ в точке $A(\dfrac{3a}{2}; \dfrac{3a}{2})$.

35. Составьте уравнение касательной к линии $(x^2 + y^2)x - ay^2 = 0$ в точке $A(\dfrac{a}{2}; \dfrac{a}{2})$.

36. Составьте уравнение нормали к линии $x = t^3 - 2t,\ y = t^2 + 1$ в точке $A(t = 1)$.

37. Вычислите кривизну линии $x = t,\quad y = \sqrt{2}\ln t,\quad z = \dfrac{1}{t}$.

38. Вычислите кручение линии $x = 2t,\quad y = \ln t,\quad z = t^2$.

39. Найдите первый коэффициент L во второй квадратичной форме параболоида вращения $x = u\cos v,\quad y = u\sin v,\ z = u^2$.

40. Найдите третий коэффициент N во второй квадратичной форме параболоида вращения $x = u\cos v,\quad y = u\sin v,\ z = u^2$.

41. Если $|\vec{a}| = 5,\ |\vec{b}| = 4, \alpha = \frac{\pi}{3}$, найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

42. Определите угол между векторами $\vec{a}\{8,1-4\}$, $\vec{b}\{2,-2,1\}$.

43. При каких значениях λ векторы $\vec{a}(3,\ \lambda,\ -2)$, $\vec{b}(5,\ -1,\ \lambda)$ будут взаимно перпендикулярны?

44. Даны длины векторов $|\vec{a}| = 7$ и $|\vec{b}| = 9$, а также угол между ними $\alpha = 135°$. Найдите $|\vec{a}+\vec{b}|$ и $|\vec{a}-\vec{b}|$.

45. На плоскости даны векторы $\vec{p}(2,\ -3),\ \vec{q}(1,\ 2)$. Запишите вектор $\vec{a}(9,\ 4)$ в виде линейной комбинации векторов $\vec{p}$ и $\vec{q}$.

46. Даны векторы $\vec{a}\{11,10,2\}$, $\vec{b}\{4,0,3\}$. Найти вектор единичный вектор $\vec{c}$, перпендикулярный к векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

47. Даны векторы $\vec{a}\{1,1,1\}$, $\vec{b}\{1,0,0\}$. Найдите единичный вектор $\vec{c}$, перпендикулярный вектору $\vec{a}$ и образующий с вектором $\vec{b}$ угол 60^0.

48. Найдите углы треугольника, построенного на векторах $\overrightarrow{AB} = 2\vec{a} - 6\vec{b}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{a} + 7\vec{b}$, $\overrightarrow{CA} = -3\vec{a} - \vec{b}$, где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – взаимно перпендикулярные и единичные векторы.

49. Найти векторное произведение векторов $\vec{a} = \{1,2,-3\}$ и $\vec{b} = \{-1,0,1\}$.

50. Даны векторы $\vec{a} = \{2;4;-1\}$ и $\vec{b} = \{3;-1;2\}$, найдите координаты векторного произведения $\left[\left(3\vec{a}-2\vec{b}\right),\left(2\vec{a}-3\vec{b}\right)\right]$.

51. $|\vec{m}| = 5,\ |\vec{n}| = 3,\ \left(\vec{m}\,\hat{}\,\vec{n}\right) = 30^0$. Найдите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB} = \vec{m} + 2\vec{n}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{m} - 3\vec{n}$.

52. Найдите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}\{-3,1,2\}$, $\vec{b}\{1,2,-4\}$.

53. Найдите площадь треугольника с вершинами в точках A (4;2;3), B (5;7;0) и C (2;8;-1).

54. Даны вершины треугольника ABC A(2;1;0), B(-3;-6;4) и C(-2;4;1). Найдите площадь треугольника и длину его высоты BH.

55. Найти смешанное произведение векторов $\vec{a}=\{1,3,-1\}$, $\vec{b}=\{0,2,-5\}$, $\vec{c}=\{1,-2,6\}$.

56. Найдите смешанное произведение векторов $\vec{a}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}, \vec{b}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}, \vec{c}=2\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}$.

57. Найдите объём параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}\{2,1-1\}$, $\vec{b}\{2,-2,1\}, \vec{c}\{1,-0,1\}$.

58. Объём тетраэдра равен $V=7$, его вершины расположены в точках $A(3;2;1)$, $B(1;4;3)$, $C(2;1;3)$. Четвёртая вершина D расположена на оси аппликаты. Найдите координаты вершины D.

59. Найдите объём параллелепипеда с вершинами в точках A (2;3;1), B (4;1;-2), C (6;3;7), D (-5;-4;8).

60. Если векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ удовлетворяют условию $\vec{a}_1+\vec{a}_2+\vec{a}_3=\vec{0}$, вычислите сумму $\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2+\vec{a}_2\cdot\vec{a}_3+\vec{a}_1\cdot\vec{a}_3$.

61. Если векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ и $\vec{a}_3$ взаимно перпендикулярны, вычислите длину вектора $\vec{p}=\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\alpha_3\vec{a}_3$.

62. Покажите, что если векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2+\vec{a}_3$ перпендикулярны друг другу, то модули векторов $\vec{a}_1+\vec{a}_2+\vec{a}_3$ и $\vec{a}_1-\vec{a}_2-\vec{a}_3$ равны друг другу.

63. Даны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равной длины; докажите, что $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$ взаимно перпендикулярны.

64. Докажите, что векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, удовлетворяющие условию $[\vec{a},\vec{b}]+[\vec{b},\vec{c}]+[\vec{c},\vec{a}]=0$, являются компланарными векторами.

65. Найдите точку на оси ординат, находящуюся на расстоянии 5 единиц от точки A(4; -6).

66. Даны точки $M_1(3,10)$ и $M_2(3,-6)$. Найдите координаты точки, делящей отрезок M_1M_2 в отношении $\lambda = \frac{1}{3}$.

67. По координатам трёх вершин параллелограмма $A(1,\ 4),\ B(3,\ -1),\ C(0,\ 2)$ найдите координаты его четвёртой вершины.

68. Если середины сторон треугольника находятся в точках $M_1(3,-2)$, $M_2(1,6)$, $M_3(-4,2)$, найдите координаты его вершин.

69. Даны координаты соседних вершин параллелограмма A(-3;5) и B(1;7) и точка $M(1;1)$ пересечения диагоналей. Найдите координаты двух других вершин.

70. Найдите длину каждой медианы треугольника с вершинами в точках A(4;2), B(5;7) и C(-3;4).

71. Найдите расстояние от начала координат до точки пересечения прямых $3x - y + 17 = 0,\ 2x + 3y - 6 = 0$.

72. Даны три вершины параллелограмма $A(8;-4), B(8;3), C(-4;5)$, а четвертая D расположена напротив B. Найти длины диагоналей параллелограмма.

73. Дан треугольник с вершинами в точках A (4;1), B (7;5) и C (-4;7). Найдите точку пересечения биссектрисы, проведенной из вершины A, со стороной BC.

74. Найдите точку пересечения прямой, проходящей через точки M (-2;-6) и N (8;2).

75. Составьте уравнение сторон треугольника с вершинами в точках A (-3, -2) $B(1,\ 2)$ $C(4,-5)$.

76. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $A(2,-3)$ и параллельной прямой $7x + 4y - 5 = 0$.

77. Напишите уравнение прямой, перпендикулярной прямой $x + 2y - 4 = 0$, проходящей через точку $M(-1,3)$.

78. Вершины треугольника расположены в точках $A(3,-6), B(-5,2), C(4,-7)$. Составьте уравнение медианы, проведенной из вершины A.

79. Найдите длину каждой медианы треугольника с вершинами в точках А(4;2), В (5;7) и С (-3;4).

80. Составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $2x-5y-1=0$ и $x+4y-7=0$, и делящей отрезок между точками $A(4;-3)$, $B(-1;2)$ в отношении $\lambda=\frac{2}{3}$.

81. Найдите уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(4,-3,2)$ и параллельной векторам $\vec{l}\,(1,-3,5), \vec{m}(-2,1,0)$.

82. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(3,6,-7)$ и перпендикулярной вектору $\vec{n}(2,3,9)$.

83. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(4,2,1)$, $M_2(5,8,4)$ и отсекающей равные отрезки на осях Ox и Oy.

84. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точки $A(-2,1,3)$, $B(3,5,-1)$ и параллельной оси Oz.

85. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1,-1,3)$ и параллельной плоскости $2x-y+z+5=0$.

86. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $(4;5;2)$, $(6;2;4)$ и параллельной вектору $(1;2;1)$.

87. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точки $A(3,-1,2)$, $B(4,-1,-1)$, $C(2,0,2)$.

88. Составьте уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(-4;5;2)$ и $M_2(1;2;-5)$.

89. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $M(3,4,1)$ и имеющей направляющий вектор $\overline{a}=\{1,2,3\}$.

90. Найдите угол между прямыми $\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-9}{-1}$ и $\frac{x-3}{-7}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{-3}$.

91. Приведите каноническому виду уравнение прямой, заданной уравнением $\begin{cases}2x-3y-3z-9=0\\x-2y+z+3=0\end{cases}$.

92. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $M(3;-5;1)$ и перпендикулярной прямой $\frac{x-3}{2}=\frac{y+5}{3}=\frac{z-1}{5}$.

93. Найдите угол между прямой $\frac{x+3}{2}=\frac{y-4}{3}=\frac{z-5}{4}$ и плоскостью $x+2y-3z-5=0$.

94. При каких значениях a прямая $\frac{x-1}{1}=\frac{y+3}{-8}=\frac{z-2}{\alpha}$ и плоскость $3x+4y+7z-2=0$ параллельны?

95. Найдите координаты точки пересечения прямой $x=-1+3t, y=1+4t, z=-1+t$ и плоскости $2x-y+z+1=0$.

96. Приведите общее уравнение кривой второго порядка $4x^2-4xy+y^2-2x-14y+7=0$ к каноническому виду и определите её вид.

97. Приведите общее уравнение кривой второго порядка $x^2+2xy+y^2-8x+4=0$ к каноническому виду и определите его вид.

98. Найдите уравнение поверхности вращения $l:\begin{cases} x=1 \\ 4y-z=0 \end{cases}$, образованной вращением вокруг оси Oz.

99. Найдите уравнение поверхности вращения, образованной вращением прямой $l:\begin{cases} x=1 \\ 4y-z=0 \end{cases}$ вокруг оси Oy.

100. Напишите уравнение сферы с вершинами диаметра в точках $A(5,-7,12)$ и $B(-1,1,-12)$.

101. Найдите центр и радиус сферы $x^2+y^2+z^2-4x-6y-2z+13=0$.

102. Найдите уравнение касательной плоскости к поверхности $x^2-y^2-2x+z-3=0$ в точке $(2,-1,5)$.

103. Дано коллинеарное преобразование на плоскости $\begin{cases} \rho x_1'=2x_1+3x_2 \\ \rho x_2'=2x_1-5x_2 \\ \rho x_3'=2x_2+x_3 \end{cases}$. Найдите прообраз точки $A(2;1;-3)$.

104. Дано коллинеарное преобразование на плоскости $\begin{cases} \rho x_1' = x_1 + 4x_1 \\ \rho x_2' = 3x_1 - 2x_2 \\ \rho x_3' = 2x_2 + x_3 \end{cases}$. Найдите прообраз точки $A(3;2;-5)$.

105. Докажите, что если сложное отношение четырёх точек $(ABCD) = \lambda$, то $(\mathrm{ABDC}) = 1/\lambda$.

106. Докажите, что если сложное отношение четырёх точек $(ABCD) = \lambda$, то $(\mathrm{ACBD}) = 1-\lambda$

107. Докажите, что если сложное отношение четырёх точек $(ABCD) = \lambda$, то $(\mathrm{ACBD}) = 0$

108. Докажите, что если сложное отношение четырёх точек $(ABCD) = \lambda$, то $(CDAB) = 1-\lambda$

109. При каких значениях a следующая инволюция является параболической? $\begin{cases} \rho x_1' = ax_1 - 2x_2 \\ \rho x_2' = 18x_1 - ax_2 \end{cases}$

110. При каких значениях a следующая инволюция будет эллиптической ? $\begin{cases} \rho x_1' = ax_1 - x_2 \\ \rho x_2' = 6x_1 - ax_2 \end{cases}$

111. Определите следующий тип инволюции $\begin{cases} \rho x_1' = 3x_1 + 2x_2 \\ \rho x_2' = 2x_1 - 3x_2 \end{cases}$.

112. Определите следующий тип инволюции $\begin{cases} \rho x_1' = 2x_1 + 3x_2 \\ \rho x_2' = x_1 - 2x_2 \end{cases}$.

113. На Евклидовой плоскости следующая точка задана своими координатами. Найдите однородные координаты этой точки $A(\frac{2}{3};\frac{1}{2})$.

114. Составьте уравнение следующей прямой $x - 4y + 6 = 0$ в однородных координатах.

115. Приведите следующее уравнение кривой второго порядка к каноническому виду: $8x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2 = 0$

116. Приведите следующее уравнение кривой второго порядка к каноническому виду: $4x_1^2 + 2x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3 = 0$

117. Составьте уравнение касательной к кривой $(x^2 + y^2)x - a\,y^2 = 0$ в точке $A(\frac{a}{2};\frac{a}{2})$.

118. Составьте уравнение нормали к кривой $(x^2 + y^2)x - a\,y^2 = 0$, проведенной в точке $A(\frac{a}{2};\frac{a}{2})$.

119. Составьте уравнение нормали к кривой $y = x^3$, проведенной в точке $x = 1$.

120. Составьте уравнение касательной к кривой $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)$ в точке t_0.

121. Найдите длину дуги кривой $x = a(\cos t + t\sin t),\ y = a(\sin t - t\cos t)$ между точками t_1 и t_2.

122. Найдите кривизну данной кривой $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)$.

123. Найдите кривизну данной кривой $r = a(1 + \cos\varphi)$.

124. Составьте уравнение нормали к кривой $x = t^3 - 2t,\ y = t^2 + 1$, проведенной в точке $A(\mathrm{t} = 1)$.

125. Составьте уравнение касательной к кривой $y = x^2 + 4x + 3$ в точке $x = 1$.