

База вопросов письменных работ государственной аттестации по
математическому анализу

1. Докажите ограниченность последовательности: $\frac{2}{1!}, \frac{4}{2!}, \frac{8}{3!}, \dots, \frac{2^n}{n!}, \dots$
2. Докажите ограниченность последовательности: $x_n = \frac{n^2}{2^n}$.
3. Докажите ограниченность последовательности:
 $x_n = 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n}$, ($n \geq 2$).
4. Докажите ограниченность последовательности: $x_n = \log_{(n+1)} 2$.
5. Исследуйте последовательность на монотонность: $x_n = \frac{n}{3^n}$.
6. Исследуйте последовательность на монотонность: $x_n = \frac{3^n}{n!}$.
7. Найдите область определения функции: $y = \lg(x+2) + \lg(x-2)$.
8. Определите тип разрыва данной функции: $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$
9. Найдите область определения функции: $y = \arcsin \frac{2x}{1+x}$
10. Найдите область определения функции: $y = \arccos(2 \sin x)$
11. Найдите область определения функции: $y = \lg(\cos(\lg x))$
12. Найдите область определения функции: $y = \operatorname{ctg} \pi x + \arccos(2^x)$
13. Исследуйте функцию на монотонность: $f(x) = x^2 e^{-x}$
14. Найдите интервалы выпуклости и вогнутости функции: $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$
15. Найдите точки перегиба функции: $f(x) = \frac{x^4}{(1+x^3)}$
16. Найдите значения экстремумов функции: $f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$
17. Исследуйте функцию на монотонность: $f(x) = x^2 \ln x$

18. Найдите точки перегиба функции: $f(x) = 2x^2 + \ln x$
19. Найдите интервалы выпуклости и вогнутости функции: $f(x) = x^5 - 10x^2 + 3x$
20. Найдите интервалы выпуклости и вогнутости функции: $f(x) = \ln x$
21. Исследуйте функцию на монотонность: $f(x) = x^2 - \ln x^2$
22. Исследуйте функцию на монотонность: $f(x) = x^2 2^{-x}$
23. Найдите точки перегиба функции: $f(x) = 1 + x^2 - \frac{x^4}{2}$
24. Найдите точки перегиба функции: $f(x) = 4x^2 + \frac{1}{x}$
25. Исследуйте функцию на монотонность: $f(x) = x + \sin 2x$
26. Найдите точки перегиба функции: $f(x) = (x^2 - 1)^3$
27. Найдите значения экстремумов функции: $f(x) = x + \frac{1}{x}$
28. Найдите значения экстремумов функции: $f(x) = xe^{-x}$
29. Вычислите предел, используя правило Лопиталья: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x - 2 \arcsin x}{x^2}$
30. Вычислите предел, используя правило Лопиталья: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - 1}{\ln x}$
31. Вычислите следующий предел, используя разложение в ряд: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4}$
32. Вычислите следующий предел, используя разложение в ряд: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$
33. Вычислите предел: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a} \right)^x$
34. Вычислите предел: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^5 - (1+5x)}{x^2 + x^5}$
35. Вычислите предел: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1)}{n^3}$
36. Вычислите предел: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - 1} \right)$

37. Вычислите предел: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$

38. Вычислите предел: $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^4 + n + 1} - \sqrt{n^4 + 1})$

39. Вычислите предел: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 8x + 15}$

40. Вычислите предел: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x) - 1}{x}$

41. Вычислите предел: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$

42. Вычислите предел: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} \right)$

43. Вычислите предел: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \dots + \frac{1}{4n^2 - 1} \right)$

44. Вычислите предел: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{x^4 - 8x^2 + 16}$

45. Вычислите предел: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right)$

46. Вычислите предел: $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x - 1}{x^5 - 2x - 1}$

47. Вычислите предел: $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{6-x} - 1}{3 - \sqrt{4+x}}$

48. Вычислите предел: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-2x-x^2} - (1+x)}{x}$

49. Вычислите предел: $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x} - 5}{\sqrt[3]{x} - 2}$

50. Вычислите предел: $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{x^3 + 8}$

51. Вычислите предел: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2 - 9}$

52. Найдите производную второго порядка функции: $y = x(\cos \ln x + \sin \ln x)$

53. Найдите производную второго порядка функции: $y = (x - \sin x)^2$

54. Найдите производную второго порядка функции: $y = x^{n-1} \ln x$

55. Найдите производную второго порядка функции: $y = x^{n-1} e^{\frac{1}{x}}$

56. Найдите производную второго порядка функции: $y = x \cos^2 x$

57. Найдите производную второго порядка функции: $y = x \ln \frac{3+x}{3-x}$

58. Найдите производную второго порядка функции: $y = \frac{1+x^2}{1-x^2}$

59. Найдите производную второго порядка функции: $y = \operatorname{arctg} \frac{x}{4}$

60. Найдите производную второго порядка функции: $y = e^{tgx}$

61. Найдите неопределённый интеграл: $\int \frac{x}{x^2 - 3x + 2} dx$

62. Вычислите интеграл: $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x}$

63. Найдите неопределённый интеграл: $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

64. Найдите неопределённый интеграл: $\int \cos x \cdot \cos 4x dx$

65. Найдите неопределённый интеграл: $\int \frac{dx}{e^{\frac{x}{2}} + e^x}$

66. Вычислите определённый интеграл: $\int_0^2 |1-x| dx$

67. Найдите неопределённый интеграл: $\int x \sqrt{1-x^2} dx$

68. Найдите неопределённый интеграл: $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$

69. Найдите неопределённый интеграл: $\int x^n \ln x dx, (n \neq -1)$

70. Вычислите определённый интеграл: $\int_0^2 e^{x^2} \cdot x dx$

71. Вычислите определённый интеграл: $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x dx$

72. Вычислите определённый интеграл: $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^6} dx$

73. Найдите неопределённый интеграл: $\int \frac{xdx}{(x+1)(x^2+1)}$

74. Найдите неопределённый интеграл: $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$

75. Вычислите определённый интеграл: $\int_{-2}^{-1} \frac{x+1}{x^2(x-1)} dx$

76. Найдите неопределённый интеграл: $\int x \sin x dx$

77. Найдите неопределённый интеграл: $\int \arctg x dx$

78. $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{xy} \operatorname{tg} \frac{xy}{1+xy}$

79. $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x+y}}{x+y}$

80. Вычислите повторный предел: $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 - xy + y^2}$

81. Найдите значения экстремумов функции: $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

82. Найдите значения экстремумов функции: $f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$

83. Найдите значения экстремумов функции: $f(x, y) = x^2 + 3y^2 - x + 18y - 4$

84. Найдите частные производные: $(2x)^{3y}$

85. Найдите частные производные: $\ln \sin \frac{x+1}{\sqrt{y}}$

86. Найдите частные производные: $\operatorname{arctg} \frac{y}{x}$

87. Найдите частные производные: $\sqrt{xy + \frac{x}{y}}$

88. Найдите частные производные: $\frac{x}{y} e^{xy}$

89. Найдите частные производные: $\left(\frac{y}{x}\right)^x$

90. Найдите частные производные: $xy \cdot \ln(xy)$

91. Найдите частные производные: $e^{-\frac{y}{x}}$

92. $x^{(n)} = \left(\frac{1+2+\dots+n}{\sqrt{9n^4+1}}; \left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{n+1}\right)$. $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} - ?$

93. $x^{(n)} = \left(\frac{1+4+7+\dots+(3n-2)}{\sqrt{5n^4+n+1}}; \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n\right)$. $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} - ?$

94. Вычислите интеграл: $\int_{AB} (x+y) ds$, где AB - отрезок прямой, соединяющей точки $A(0;2), B(2;0)$.

95. Вычислите интеграл: $\int_{AB} 4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt{y} ds$, где AB - отрезок прямой, соединяющей точки $A(-1;0), B(0;1)$.

96. Вычислите интеграл: $\iint_{(D)} (x^2 + y^2) dx dy$, где (D) - параллелограмм со сторонами: $y = x, y = x + a, y = a, y = 3a (a > 0)$.

97. Вычислите интеграл: $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2 + y^2) dx dy$

98. $\iint_{(D)} xy^2 dx dy$, (D) - область, ограниченная параболой $y^2 = 2px$ и прямыми $x = \frac{p}{2} (p > 0)$.

99. Найдите область сходимости функционального ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} (5 - x^2)^n$

100. Найдите область абсолютной сходимости функционального ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n}{3} \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \right]^n$

101. Исследуйте ряд на сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! a^n}{n^n}$, $a \neq e, a > 0$

102. Найдите радиус и интервал сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^{\sqrt{n}}}$

103. Исследуйте ряд на сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{3^n \cdot n!}$

104. Найдите область абсолютной сходимости функционального ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(\frac{2x-3}{4} \right)^n$$

105. Найдите сумму функционального ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{[(n-1)x+1](nx+1)}, (0 < x < +\infty)$

106. Исследуйте ряд на сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2}$

107. Найдите предельную функцию функциональной последовательности:

$$f_n(x) = nx^2 \sin \frac{x}{n}, \quad -\infty < x < +\infty$$

108. Найдите область абсолютной сходимости функционального ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^2}{n} + x \right)^n$$

109. Найдите область абсолютной сходимости функционального ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^{\ln x}}$$

110. Найдите область абсолютной сходимости функционального ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\ln x^2}$$

111. Найдите радиус и интервал сходимости степенного ряда: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)5^n}$

112. Найдите радиус и интервал сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

113. Найдите радиус и интервал сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$.

114. Найдите радиус и интервал сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2n+1}$

115. Найдите радиус и интервал сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+4}{5n+7} \right)^n x^n$

116. Найдите предельную функцию функциональной последовательности:

$$f_n(x) = n[\ln(x+n) - \ln n]$$

117. Найдите предельную функцию функциональной последовательности:

$$f_n(x) = \left(\frac{n+x}{n-x} \right)^n, \quad -\infty < x < +\infty$$

118. Найдите общее решение уравнения: $y'' - 16y = 0$

119. Найдите общий интеграл уравнения: $x(y^2 + 1)dx + y(x^2 + 1)dy = 0$

120. Начертите чертёж области: $1 < |z-1| < 3$

121. Начертите чертёж области: $\operatorname{Im} \frac{z}{1+i} > 0$

122. Начертите чертёж области: $|z+i| = |z-i|$

123. Начертите чертёж области: $|z+1| + |z-1| = 4$

124. Начертите чертёж области: $\operatorname{Re} \frac{1}{z} < 1$

125. Начертите чертёж области: $|z| > 1 - \operatorname{Re} z$